

УДК 517.927.4, 517.957, 517.958
doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-4

Распространение ТМ-волны в плоском полукрытом диэлектрическом слое с нелокальной нелинейностью

Ю. Г. Смирнов¹, С. В. Тихов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹mmm@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается задача о распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, заполненном средой, диэлектрическая проницаемость которой характеризуется интегральной формой закона Керра. Основная задача при описании процесса распространения волн в волноведущей структуре – получение дисперсионного уравнения для постоянных распространения и исследование его разрешимости. *Материалы и методы.* Решаются уравнения Максвелла в частотной области. Система содержит зависимость от квадрата модуля напряженности электрического поля. *Результаты и выводы.* Получена система дисперсионных уравнений, по сути являющаяся системой дисперсионных уравнений для ТМ-волн в структуре. Приводятся результаты расчетов постоянных распространения в зависимости от параметров задачи.

Ключевые слова: нелинейные среды, модифицированный закон Керра, нелокальная нелинейность, собственные волны, задача на собственные значения, система дисперсионных уравнений

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-11-20087).

Для цитирования: Смирнов Ю. Г., Тихов С. В. Распространение ТМ-волны в плоском полукрытом диэлектрическом слое с нелокальной нелинейностью // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 1. С. 40–53. doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-4

The propagation of the TM-wave in a flat semi-open dielectric layer with nonlocal nonlinearity

Yu.G. Smirnov¹, S.V. Tikhov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹mmm@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* The article considers the problem of propagation of electromagnetic waves in a dielectric layer filled with a medium whose permittivity is characterized by the integral form of the Kerr law. The main task in describing the process of wave propagation in a waveguide structure is to obtain a dispersion equation for propagation constants and study its solvability. *Materials and methods.* Maxwell's equations are solved in the frequency domain. The system contains the dependence on the square of the modulus of the electric field strength. *Results and conclusions.* A system of dispersion equations is obtained, which in fact is a system of dispersion equations for TM waves in the structure. The results of calculations of propagation constants depending on the parameters of the problem are presented.

Keywords: nonlinear media, modified Kerr law, nonlocal nonlinearity, eigenwaves, eigenvalue problem, system of dispersion equations

Financing: the research was financed by the RSF within the research project 20-11-20087.

For citation: Smirnov Yu.G., Tikhov S.V. The propagation of the TM-wave in a flat semi-open dielectric layer with nonlocal nonlinearity. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2023;(1):40–53. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-4

Введение

Задачи распространения монохроматических поляризованных (ТЕ- и ТМ-) волн в нелинейных средах активно изучаются как в России, так и за рубежом.

Большое внимание сосредоточено на тех нелинейностях, которые отвечают эффектам самовоздействия. Такие эффекты возникают при распространении электромагнитных волн в веществе и имеют широкое применение, например, в физике плазмы, нелинейной оптике, лазерной технике и микроэлектронике. Диэлектрическая проницаемость в таком случае представляет собой сумму постоянной величины и некоторого нелинейного слагаемого.

Одним из наиболее известных и широко применяемых нелинейных законов, описывающих взаимодействие электромагнитного поля с веществом и учитывающих эффект самовоздействия, является закон Керра, согласно которому диэлектрическая проницаемость среды есть сумма некоторого постоянного слагаемого и квадрата модуля напряженности электрического поля, умноженного на некоторый малый коэффициент. По сути закон Керра является локальным: свойства среды в данной точке пространства зависят от интенсивности электрического поля в той же самой точке.

Естественно ожидать, что при уменьшении коэффициента нелинейности, отвечающего за степень влияния нелинейных эффектов в исследуемом процессе, результаты, получаемые из нелинейной модели, должны все более соответствовать результатам, которые получаются из соответствующей линейной модели (если положить нелинейное слагаемое равным нулю).

Однако в случае керровской нелинейности такого не происходит. В работе [1] подробно обсуждается тот факт, что при сколь угодно малых значениях коэффициента нелинейности результаты, получаемые из нелинейной модели, принципиально отличаются от тех, что получаются из линейной. В статье [1] предлагается некоторая модификация закона Керра, которая, по сути, делает этот закон не локальным, но интегральным. В этой работе исследуется задача о распространении ТЕ-волны в плоском диэлектрическом слое, заполненном средой с такой нелинейностью. Полученные результаты авторы сравнивают с теми, что следуют из керровской модели, и теми, что дает соответствующая линейная модель, и указывают на некоторое преимущество предложенной модели перед классическим законом Керра.

В связи с этим естественно рассмотреть такую модель и в других задачах о распространении монохроматических поляризованных волн. Настоящая статья посвящена исследованию задачи о распространении ТМ-волны в плоском полукрытом диэлектрическом слое с нелокальной нелинейностью.

Предложенным методом возможно исследовать разные конфигурации волноводной структуры, в частности, учесть отсутствие/наличие абсолютно проводящих стенок на одной/двух границах волновода. Интересно также сравнить результаты, полученные с использованием интегральной формы закона Керра, с результатами о распространении электромагнитной волны в слое, покрытом графеном [2].

1. Электродинамическая постановка задачи

Рассмотрим монохроматическую электромагнитную волну, которая имеет вид $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{i\omega t}$, где

$$\mathbf{E} = (E_x(x), 0, E_z(x))e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (0, H_y(x), 0)e^{i\gamma z} \quad (1)$$

есть комплексные амплитуды, ω – круговая частота, γ – вещественный параметр. Электромагнитная волна распространяется в плоском диэлектрическом слое $\Sigma = \{(x, z) : 0 \leq x \leq h, z \in \mathbb{R}\}$. На границе $x = 0$ волновод имеет идеально проводящую стенку, тогда как граница $x = h$ открыта. Верхнее полупространство $x > h$ характеризуется постоянной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_s \geq \epsilon_0$, где ϵ_0 есть диэлектрическая постоянная.

Диэлектрическая проницаемость ϵ' среды внутри волновода имеет вид

$$\epsilon' = \epsilon_l + \alpha \int_0^h |\mathbf{E}|^2 dx, \quad (2)$$

где $\epsilon_l \geq \epsilon_s$ и α есть положительные постоянные.

Формула (2) представляет собой некоторую модификацию широко используемого во многих областях физики, в частности в нелинейной оптике, закона Керра. Формула (2) рассмотрена в работе [1] в задаче о распространении ТЕ-поляризованной волны в плоском экранированном диэлектрическом слое.

Тогда диэлектрическую проницаемость во всем пространстве можно представить в виде кусочной функции:

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_s, & x > h, \\ \epsilon', & 0 \leq x \leq h. \end{cases}$$

Магнитная проницаемость во всем пространстве $\mu = \mu_0$, где μ_0 есть магнитная постоянная.

Комплексные амплитуды (1) удовлетворяют системе уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0\epsilon\mathbf{E}. \quad (3)$$

Касательные компоненты электрического поля обращаются в нуль на абсолютно проводящих стенках; в рассматриваемом случае касательной компонентой является E_z и, следовательно, эта функция должна обращаться в нуль на границе $x = 0$. На границе $x = h$ касательные компоненты электрического и магнитного полей должны быть непрерывны. Также ввиду открытости границы $x = h$ и проникновения поля в область $x > h$ естественно

наложить на поле условие затухания на бесконечности. Таким образом, рассматриваются поверхностные волны [3].

Задача \mathcal{P}' заключается в нахождении значений $\gamma = \hat{\gamma}$ таких, что существует поле \mathbf{E} , \mathbf{H} , удовлетворяющее системе уравнений Максвелла (3) и перечисленным выше условиям. Числа $\gamma = \hat{\gamma}$, являющиеся решениями задачи \mathcal{P}' , называют *постоянными распространения* волновода, а отвечающие им функции \mathbf{E} , \mathbf{H} – *собственными модами* волновода.

2. Нелинейная задача на собственные значения

Подставляя комплексные амплитуды (1) в (3), получаем

$$\begin{aligned}\gamma X - Z' &= i\omega\mu_0 H_y, \\ i\gamma H_y &= \omega\varepsilon_0 \varepsilon X, \\ H'_y &= -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon Z,\end{aligned}\quad (4)$$

где использованы обозначения $X := iE_x$, $Z := E_z$. Эту систему можно привести к виду

$$\begin{aligned}X'(x) &= \gamma Z(x), \\ Z'(x) &= \gamma^{-1}(\gamma^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon)X(x).\end{aligned}$$

Пусть $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$. Переходя в полученной системе к безразмерным величинам с помощью замен

$$\tilde{x} = k_0 x, \quad \tilde{h} = k_0 h, \quad \tilde{\gamma} = k_0^{-1}\gamma, \quad \tilde{\alpha} = k_0^{-1}\alpha$$

и опуская знак тильды, приходим к системе

$$\begin{aligned}X'(x) &= \gamma Z(x), \\ Z'(x) &= \gamma^{-1}(\gamma^2 - \varepsilon)X(x).\end{aligned}\quad (5)$$

Замечание 1. Ясно, что если тройка (X, Z, γ) является решением системы (5), то тройки $(-X, Z, -\gamma)$ и $(X, -Z, -\gamma)$ также являются решениями (5). По этой причине далее будем рассматривать только случай $\gamma > 0$.

Дифференцируя второе уравнение системы (5) и используя первое уравнение системы (5), получаем

$$Z'' = (\gamma^2 - \varepsilon)Z. \quad (6)$$

Решая систему (5) в полупространстве $x > h$ и используя условие затухания поля на бесконечности, находим

$$\begin{aligned}X(x) &= -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s}} B e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s}}, \\ Z(x) &= B e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s}},\end{aligned}$$

где B есть некоторая постоянная. Заметим, что указанные функции X , Z должны быть вещественнозначными; отсюда следует, что γ должно удовлетворять неравенству

$$\gamma > \sqrt{\varepsilon_s}. \quad (7)$$

Система уравнений (5) в слое Σ имеет вид

$$\begin{aligned} X'(x) &= \gamma Z(x), \\ Z'(x) &= \gamma^{-1}(\gamma^2 - \varepsilon')X(x), \end{aligned} \quad (8)$$

где ε' определена в (2).

Из перечисленных выше электродинамических условий, налагаемых на поле, получаются следующие краевые условия: из условия обращения в нуль на границе $x=0$ касательной компоненты электрического поля имеем

$$Z(0) = 0, \quad (9)$$

а из условия непрерывности касательных компонент электрического и магнитного полей на границе $x=h$ с учетом того, что касательная компонента H_y магнитного поля связана с функцией X во втором уравнении системы (4), имеем

$$[\varepsilon X]|_{x=h}, \quad [Z]|_{x=h} = 0,$$

где $[f(x)]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$.

Используя последнее условие и решение в полупространстве $x > h$, получаем условие на границе $x=h$ для функций X , Z вида

$$\varepsilon' \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s} X(h) + \varepsilon_s \gamma Z(h) = 0. \quad (10)$$

Кроме того, нам понадобится еще одно дополнительное условие для получения дискретного набора решений задачи, что соответствует физическому процессу распространения волн в волноведущих структурах. В качестве такого условия используем

$$X(0) = A, \quad (11)$$

где A – некоторая постоянная. Заметим, что дополнительное условие в нелинейных задачах такого типа необходимо (см. [4]) и его можно выбрать различными способами (в частности, см. разд. 5).

Итак, задача о распространении волны сведена к задаче \mathcal{P} , которая заключается в нахождении таких $\gamma = \hat{\gamma}$, удовлетворяющих неравенству (7), что существует пара функций $X \equiv X(x; \hat{\gamma}) \in C^1([0, h])$, $Z \equiv Z(x; \hat{\gamma}) \in C^2([0, h])$, удовлетворяющих системе уравнений (8) и условиям (9)–(11).

Определение 1. Число $\gamma = \hat{\gamma} > \sqrt{\varepsilon_s}$ такое, что существует пара функций $X \equiv X(x; \hat{\gamma}) \in C^1([0, h])$, $Z \equiv Z(x; \hat{\gamma}) \in C^2([0, h])$, удовлетворяющих системе

уравнений (8) и условиям (9)–(11), назовем *собственным значением* задачи \mathcal{P} , а функции X , Z , отвечающие данному $\hat{\gamma}$, назовем *собственными функциями* задачи \mathcal{P} .

3. Линейная задача

Если в формуле (2) положить $\alpha = 0$, то задача \mathcal{P} вырождается в линейную задачу, которую назовем задачей \mathcal{P}_0 .

Несмотря на то, что постановка задачи \mathcal{P} представлена в разд. 2, а задача \mathcal{P}_0 является ее вырожденным случаем, дадим формулировку задачи \mathcal{P}_0 еще раз. Итак, задача \mathcal{P}_0 заключается в нахождении чисел $\gamma = \tilde{\gamma}$ таких, что существует пара функций $X_l \equiv X_l(x; \tilde{\gamma}) \in C^1([0, h])$, $Z_l \equiv Z_l(x; \tilde{\gamma}) \in C^2([0, h])$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned} X_l'(x) &= \gamma Z_l(x), \\ Z_l'(x) &= \gamma^{-1}(\gamma^2 - \varepsilon') X_l(x) \end{aligned}$$

и граничным условиям $Z_l(0) = 0$ и $\varepsilon_l \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s} X_l(h) + \varepsilon_s \gamma Z_l(h) = 0$.

Заметим, что условие (11), необходимое в задаче \mathcal{P} для определения дискретного набора решений, в линейной задаче \mathcal{P}_0 не требуется и потому опущено.

Решая представленную выше систему и используя указанные краевые условия, приходим к соотношению

$$\operatorname{tg}\left(h\sqrt{\varepsilon_l - \gamma^2}\right) = \frac{\varepsilon_l \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s}}{\varepsilon_s \sqrt{\varepsilon_l - \gamma^2}},$$

которое и определяет собственные значения задачи \mathcal{P}_0 . Исследуя полученное уравнение, легко доказывается следующее утверждение.

Утверждение 1. Задача \mathcal{P}_0 имеет не более чем конечное число решений $\tilde{\gamma} \in (\sqrt{\varepsilon_s}, \sqrt{\varepsilon_l})$.

Доказательство данного утверждения следует из элементарного анализа функций в левой и правой частях дисперсионного уравнения.

4. Система дисперсионных уравнений задачи \mathcal{P}

Перейдем к решению задачи \mathcal{P} . Начнем с рассмотрения вспомогательной задачи для системы уравнений (8) с условиями $Z(0) = 0$, $X(0) = A$. Предположим, что указанная задача разрешима при некотором γ , удовлетворяющем неравенству (7), а пара функций X , Z , являющихся ее решениям, определена на всем отрезке $x \in [0, h]$. Отсюда следует, что интеграл $\int_0^h (X^2(x) + Z^2(x)) dx$ в формуле (2) существует и представляет собой некоторое число, зависящее от параметра γ .

Принимая во внимание приведенные выше рассуждения, уравнения (8) можно рассматривать как систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. С учетом того, что функция Z должна обращаться в нуль на границе $x=0$, решение системы (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} X(x) &= -\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}} C \cos x \sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}, \\ Z(x) &= C \sin x \sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где C – некоторая постоянная.

Используя условие (11), находим

$$C = -\frac{\sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}}{\gamma} A.$$

Подставляя C в формулы (12) для X , Z , получаем

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos x \sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}, \\ Z(x) &= -\frac{\sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}}{\gamma} A \sin x \sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя найденные функции X , Z в формулу (2), получаем

$$\varepsilon' = \varepsilon_l + \frac{\alpha A^2}{2(\varepsilon' - (\varepsilon' - \gamma^2))} \left[\varepsilon' h + (\varepsilon' - 2(\varepsilon' - \gamma^2)) \frac{\sin 2h \sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}}{2\sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}} \right]. \quad (14)$$

Перейдем теперь к решению непосредственно краевой задачи. Подставляя найденные функции X , Z в условие (10), приходим к уравнению вида

$$\operatorname{tg} \left(h \sqrt{\varepsilon' - \gamma^2} \right) = \frac{\varepsilon' \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s}}{\varepsilon_s \sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}}. \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15) представляют собой систему дисперсионных уравнений задачи \mathcal{P} в том смысле, что если пара чисел $(\varepsilon', \gamma) = (\hat{\varepsilon}, \hat{\gamma})$ удовлетворяет обоим уравнениям (14), (15) то $\hat{\gamma}$ является собственным значением задачи \mathcal{P} , а отвечающие $\hat{\gamma}$ собственные функции X , Z определяются по формулам (13), где $\varepsilon' = \hat{\varepsilon}$, $\gamma = \hat{\gamma}$.

Вводя обозначение $t = \varepsilon' - \gamma^2$, выражение (15) можно записать в виде

$$\varepsilon'^3 - \varepsilon'^2 (t + \varepsilon_s) = \varepsilon_s^2 t \cdot \operatorname{tg}^2 h \sqrt{t}, \quad (16)$$

а формулу (14) в виде

$$\varepsilon' = \varepsilon_l + \frac{\alpha A^2}{2(\varepsilon' - t)} \left[\varepsilon' h + (\varepsilon' - 2t) \frac{\sin 2h \sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \right]. \quad (17)$$

Исследуя систему из двух уравнений (16) и (17), можно получить следующий результат.

Утверждение 2. Если $\frac{\alpha A^2 h}{2} > \varepsilon_s$, то задача \mathcal{P} имеет бесконечное число собственных значений, а если $\frac{\alpha A^2 h}{2} < \varepsilon_s$, то лишь не более конечного числа собственных значений.

Запишем уравнение (17) в виде

$$\varepsilon' = \varepsilon_l + \frac{\alpha A^2}{2} \frac{\sin 2h\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} + \frac{\alpha A^2 h}{2} + \frac{\alpha A^2}{2} ht \frac{1}{\varepsilon' - t} \left(1 - \frac{\sin 2h\sqrt{t}}{2h\sqrt{t}} \right). \quad (18)$$

Пусть

$$a + t = \varepsilon_l + \frac{\alpha A^2}{2} \frac{\sin 2h\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} + \frac{\alpha A^2 h}{2}, \quad b = \frac{\alpha A^2}{2} ht \left(1 - \frac{\sin 2h\sqrt{t}}{2h\sqrt{t}} \right),$$

тогда формулу (18) можно записать в виде

$$\varepsilon' = a + t + \frac{b}{\varepsilon' - t},$$

или, после некоторых преобразований:

$$(\varepsilon' - t)^2 - a(\varepsilon' - t) - b = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим его положительный корень:

$$\varepsilon' = t + \frac{2b}{\sqrt{a^2 + 4b - a}}. \quad (19)$$

Ясно, что $a \sim -t$ и $b \sim \frac{\alpha A^2 h}{2} t$ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда из (19) получаем, что при $t \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\varepsilon' = t + \frac{\alpha A^2 h}{2} + o(1). \quad (20)$$

Подставляя (20) в уравнение (16), получаем, что при $t \rightarrow +\infty$ верно равенство

$$\left(t + \frac{\alpha A^2 h}{2} + o(1) \right)^2 \left(\frac{\alpha A^2 h}{2} + o(1) - \varepsilon_s \right) = \varepsilon_s^2 t \tan^2 h\sqrt{t}. \quad (21)$$

Если $\frac{\alpha A^2 h}{2} > \varepsilon_s$, то при $t \rightarrow +\infty$ левая часть (21) положительна, равно как и правая часть. С учетом периодичности функции тангенса уравнение (21) имеет бесконечно много решений. То же заключение получаем и для уравнения (15).

С другой стороны, если $\frac{\alpha A^2 h}{2} < \varepsilon_s$, то при $t \rightarrow +\infty$ левая часть (21) отрицательна, в то время как правая положительна. Отсюда следует, что уравнение (21) имеет не более конечного числа решений.

5. Другое дополнительное условие

Для определения решений в задаче \mathcal{P} недостаточно двух краевых условий (9), (10); по этой причине было добавлено условие (11). Однако дополнительное условие можно выбрать и иначе. Например, можно потребовать, чтобы постоянная C в формуле (12) была фиксирована, т.е. $C = A$, где A есть некоторая постоянная. С физической точки зрения это условие означает, что мы фиксируем амплитуду компоненты E_z электрического поля. Подставляя $C = A$ в (12), получаем

$$X(x) = -\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}} A \cos x \sqrt{\varepsilon' - \gamma^2},$$

$$Z(x) = A \sin x \sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}.$$

Подставляя найденные X, Z в формулу (2), получаем

$$\varepsilon' = \varepsilon_l + \frac{\alpha A^2}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon' h}{\varepsilon' - \gamma^2} + \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon' - \gamma^2} - 2 \right) \frac{\sin 2h \sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}}{2 \sqrt{\varepsilon' - \gamma^2}} \right),$$

откуда, вводя обозначение $t = \varepsilon' - \gamma^2$, получаем

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_l \frac{4}{\alpha A^2} t^{3/2} - 2t \sin 2h \sqrt{t}}{\frac{4}{\alpha A^2} t^{3/2} - 2ht^{1/2} - \sin 2h \sqrt{t}}. \quad (22)$$

Уравнения (15) и (16) остаются без изменений.

Из формулы (2) следует, что $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon_l$ при $t \rightarrow +\infty$. Левая часть уравнения (16) становится отрицательной при больших t , а правая часть остается при этом положительной. Следовательно, уравнение (16) (и (15)) имеет не более конечного числа решений относительно t . Таким образом, верно следующее утверждение.

Утверждение 3. Задача \mathcal{P} при $C = A$ в (12), где A – фиксированная постоянная, имеет не более конечного числа собственных значений.

6. Численные результаты

Вводя обозначение $x = \sqrt{t}$, запишем формулу (16) в виде

$$\varepsilon'^2 - \left(x^2 + \varepsilon_l + \frac{\alpha A^2 h}{2} + \frac{\alpha A^2 \sin 2hx}{2x} \right) \varepsilon' + \varepsilon_l x^2 + \frac{\alpha A^2}{2} x \sin 2hx = 0,$$

откуда получаем выражение для $\varepsilon' = \varepsilon'(x)$ вида

$$\varepsilon'(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 + \varepsilon_l + \frac{\alpha A^2 h}{2} + \frac{\alpha A^2 \sin 2hx}{2} + \sqrt{D(x)} \right), \quad (23)$$

где выражение под квадратным корнем определяется по формуле

$$D(x) = \left(x^2 + \varepsilon_l + \frac{\alpha A^2 h}{2} + \frac{\alpha A^2 \sin 2hx}{2} \right)^2 - 4 \left(\varepsilon_l x^2 + \frac{\alpha A^2}{2} x \sin 2hx \right).$$

Подставляя (23) в (16) с $t = x^2$, получаем семейство уравнений вида

$$F(x; n) = 0 \quad (24)$$

для различных n , где

$$F(x; n) = hx - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon'(x)^3 - \varepsilon'(x)^2 (\varepsilon_s + x^2)}}{\varepsilon_s x} \right) - \pi n.$$

Полученное уравнение удобно использовать для численного решения задачи \mathcal{P} : находим корень $x = x^*$ уравнения (24) при помощи какого-либо численного метода решения нелинейного уравнения, затем вычисляем $\varepsilon'(x^*)$,

используя выражение (23), и, наконец, находим $\gamma = \gamma^*$ по формуле $\gamma = \sqrt{\varepsilon' - x^2}$.

Ниже представлены некоторые численные результаты. Для расчетов, результаты которых представлены на рис. 1, использовались параметры: $\varepsilon_s = 0,1$; $A = 2$; $\varepsilon_l = 4$; для расчетов, результаты которых представлены на рис. 2–4, использовались параметры: $\varepsilon_s = 1$; $A = 1$; $\varepsilon_l = 4$.

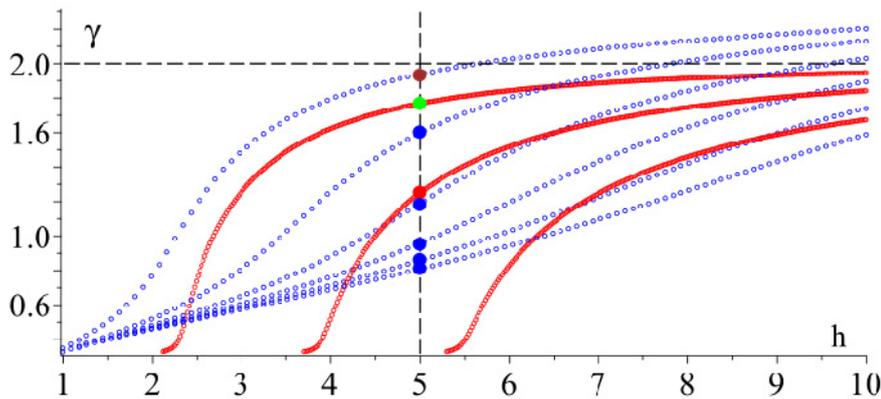


Рис. 1. Несколько первых дисперсионных кривых задач \mathcal{P} (при $\alpha = 0,05$) и \mathcal{P}_0 ;

большие закрашенные точки обозначают собственные значения $\hat{\gamma}_1 \approx 1,92$ (коричневый), $\hat{\gamma}_2 \approx 1,6$ (синий), $\hat{\gamma}_3 \approx 1,18$ (синий), $\hat{\gamma}_4 \approx 0,96$ (синий), $\hat{\gamma}_5 \approx 0,86$ (синий), $\hat{\gamma}_6 \approx 0,81$ (синий) задачи \mathcal{P} и собственные значения $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,76$ (зеленый), $\tilde{\gamma}_2 \approx 1,25$ (красный) задачи \mathcal{P}_0

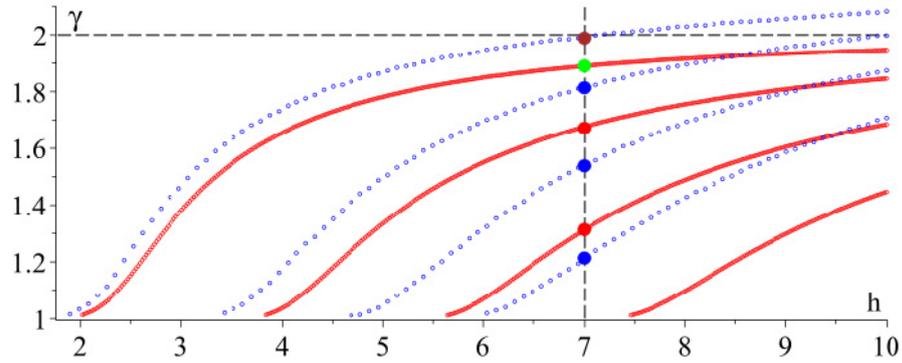


Рис. 2. Дисперсионные кривые задач \mathcal{P} (при $\alpha = 0,1$) и \mathcal{P}_0 ; большие закрашенные точки обозначают собственные значения $\hat{\gamma}_1 \approx 1,99$ (коричневый), $\hat{\gamma}_2 \approx 1,81$ (синий), $\hat{\gamma}_3 \approx 1,54$ (синий), $\hat{\gamma}_4 \approx 1,21$ (синий) задачи \mathcal{P} и собственные значения $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,89$ (зеленый), $\tilde{\gamma}_2 \approx 1,67$ (красный), $\tilde{\gamma}_3 \approx 1,31$ (красный) задачи \mathcal{P}_0

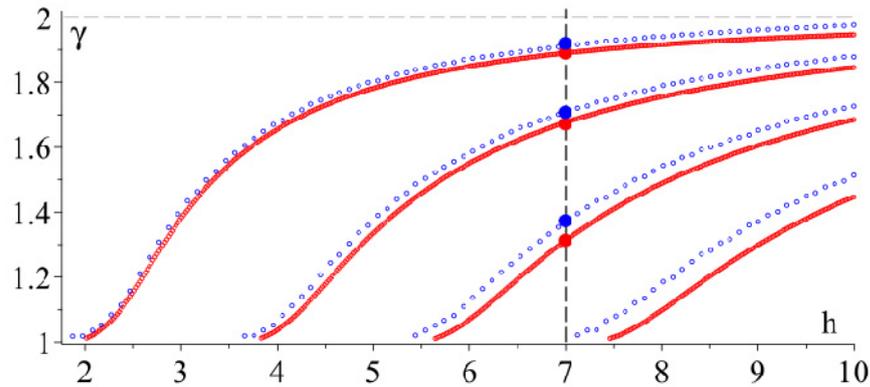


Рис. 3. Дисперсионные кривые задач \mathcal{P} (при $\alpha = 0,02$) и \mathcal{P}_0 ; большие закрашенные точки обозначают собственные значения $\hat{\gamma}_1 \approx 1,92$, $\hat{\gamma}_2 \approx 1,71$, $\hat{\gamma}_3 \approx 1,37$ задачи \mathcal{P} (синие точки) и собственные значения $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,89$, $\tilde{\gamma}_2 \approx 1,67$, $\tilde{\gamma}_3 \approx 1,31$ задачи \mathcal{P}_0 (красные точки)

На рис. 1–3 представлены дисперсионные кривые задач \mathcal{P} и \mathcal{P}_0 ; первые изображены синим цветом, а вторые – красным цветом. Дисперсионные кривые строятся как зависимость волнового числа от частоты волны ω или от толщины волновода h . Поскольку в нашей постановке задачи нигде явно не фигурирует ω ввиду произведенной нормировки на $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$, то мы построили дисперсионные кривые как зависимость $\gamma \equiv \gamma(h)$.

Вертикальные прямые на рис. 1–3 соответствуют волноводам с некоторой фиксированной толщиной (с точностью до коэффициента нормировки k_0^{-1}). Точки пересечения дисперсионных кривых с этой прямой являются собственными значениями задачи \mathcal{P} , отвечающими постоянным распространения в задаче о распространении волны (с точностью до коэффициента нормировки k_0).

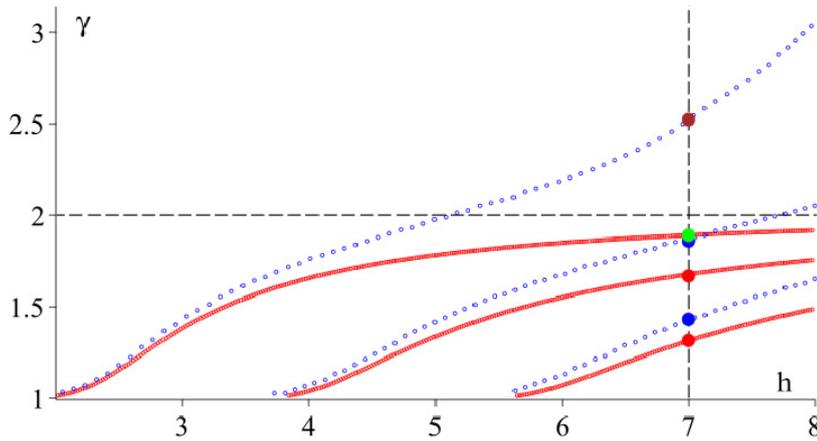


Рис. 4. Дисперсионные кривые задач \mathcal{P} (при $\alpha = 0,05$) с условием $C = A$ и \mathcal{P}_0 ; большие закрашенные точки обозначают собственные значения $\hat{\gamma}_1 \approx 2,49$ (коричневый), $\hat{\gamma}_2 \approx 1,86$ (синий), $\hat{\gamma}_3 \approx 1,43$ (синий) задачи \mathcal{P} с условием $C = A$ и собственные значения $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,89$ (зеленый), $\tilde{\gamma}_2 \approx 1,67$ (красный), $\tilde{\gamma}_3 \approx 1,31$ (красный) задачи \mathcal{P}_0

Для расчетов, результаты которых представлены на рис. 1, значения параметров задачи выбраны таким образом, что выполняется условие $\frac{\alpha A^2 h}{2} > \varepsilon_s$. Согласно утверждению 2 в этом случае задача \mathcal{P} имеет бесконечно много собственных значений. На рис. 1 изображены лишь первые шесть дисперсионных кривых задачи \mathcal{P} и все они пересекаются с прямой $h = 5$. Все следующие дисперсионные кривые ($n = 7, 8, \dots$) также будут пересекаться с указанной вертикальной прямой.

На рис. 2 и 3 представлены результаты, отвечающие случаю, когда задача \mathcal{P} имеет не более чем конечное число решений. На рисунках видно, что вертикальная прямая $h = 7$ имеет лишь четыре (рис. 2) и три (рис. 3) точки пересечения с дисперсионными кривыми задачи \mathcal{P} .

На рис. 5, 6 представлены численные результаты и для задачи с другим дополнительным условием $C = A$ (см. разд. 5).

Используя обозначение $x = \sqrt{t}$, формулу (22) можно записать в виде

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_l \frac{4}{\alpha A^2} x^3 - 2x^2 \sin 2hx}{\frac{4}{\alpha A^2} x^3 - 2hx - \sin 2hx}. \quad (25)$$

Подставляя в найденное выражение для ε' в (16) с $t = x^2$, получаем семейство уравнений $F_1(x; n) = 0$, аналогичное (24) (с отличием в выражении для ε'). Алгоритм работы с полученным семейством уравнений точно такой же, как и с (24).

Для расчетов в задаче с условием $C = A$ использованы те же значения параметров, что и в исходной задаче.

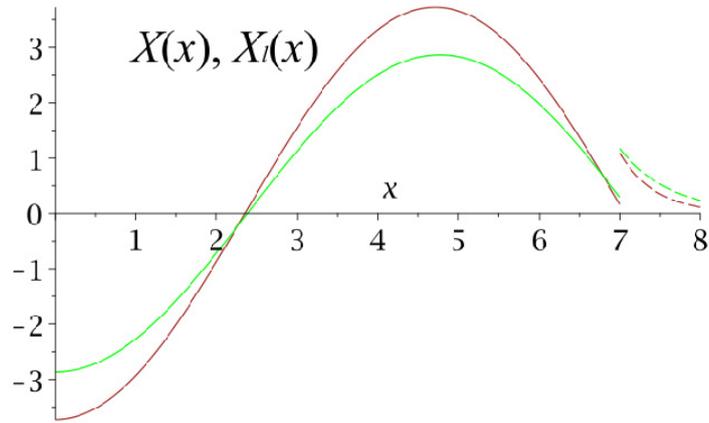


Рис. 5. Собственные функции $X(x; \hat{\gamma}_1)$ (коричневая кривая) и $X_l(x; \tilde{\gamma}_1)$ (зеленая кривая) задач \mathcal{P} (с условием $C = A$) и \mathcal{P}_0 для собственных значений, отмеченных на рис. 4 зеленым и коричневым цветом соответственно

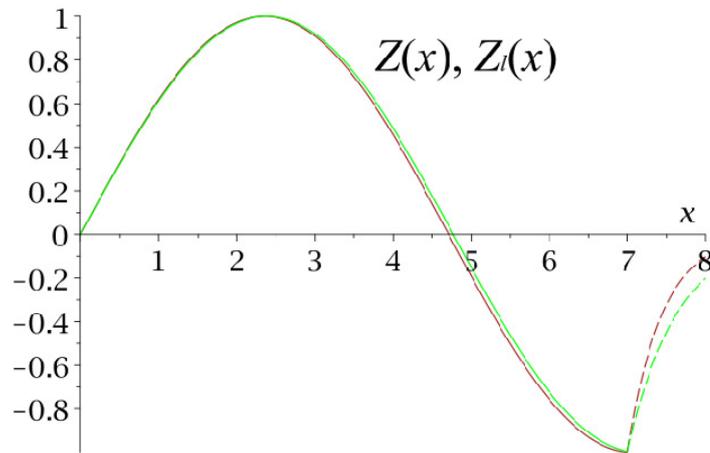


Рис. 6. Собственные функции $Z(x; \hat{\gamma}_1)$ (коричневая кривая) и $Z_l(x; \tilde{\gamma}_1)$ (зеленая кривая) задач \mathcal{P} (с условием $C = A$) и \mathcal{P}_0 для собственных значений, отмеченных на рис. 4 зеленым и коричневым цветом соответственно

Заключение

В статье представлены аналитические и численные результаты исследования нелинейной задачи на собственные значения, отвечающей задаче о распространении ТМ-поляризованной электромагнитной волны в полукрытом (частично экранированном) нелинейном диэлектрическом слое. Использовалась интегральная форма закона Керра для описания нелинейности диэлектрического слоя.

Получены явные дисперсионные уравнения, решения которых соответствуют собственным значениям нелинейной краевой задачи. Доказано, что в зависимости от начальных условий задача имеет либо конечное, либо бесконечное число решений. Этот эффект обнаружен впервые для нелинейных краевых задач на собственные значения в этой области электродинамики.

Численные результаты позволяют оценить влияние нелинейности при сравнении с линейным случаем.

Список литературы

1. Smirnov Y., Tikhov S., Valovik D. On a Different Vision of Kerr Law in Nonlinear Optical Waveguide Theory // *Photonics*. 2022. Vol. 9 (12). P. 901.
2. Смирнов Ю. Г., Тихов С. В., Гусарова Е. В. О распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, покрытом графеном // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2022. № 3. С. 11–18.
3. Shestopalov Y., Smirnov Y., Smolkin E. *Optical Waveguide Theory. Mathematical Models, Spectral Theory and Numerical Analysis*. Springer, Springer Series in Optical Sciences, 2022. Vol. 237.
4. Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г. *Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах*. Пенза : Изд-во ПГУ, 2010.

References

1. Smirnov Y., Tikhov S., Valovik D. On a Different Vision of Kerr Law in Nonlinear Optical Waveguide Theory. *Photonics*. 2022;9(12):901.
2. Smirnov Yu.G., Tikhov S.V., Gusarova E.V. On a propagation of electromagnetic waves in a dielectric layer coated with graphene. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2022;(3):11–18. (In Russ.)
3. Shestopalov Y., Smirnov Y., Smolkin E. *Optical Waveguide Theory. Mathematical Models, Spectral Theory and Numerical Analysis*. Springer, Springer Series in Optical Sciences, 2022;237.
4. Valovik D.V., Smirnov Yu.G. *Rasprostraneniye elektromagnitnykh voln v nelineynykh sloistykh sredakh = Propagation of electromagnetic waves in nonlinear layered media*. Penza: Izd-vo PGU, 2010. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Yuriy G. Smirnov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Станислав Вячеславович Тихов

аспирант, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

Stanislav V. Tikhov

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 10.02.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 25.03.2023

Принята к публикации / Accepted 14.04.2023